

Institut : <u>Mahmoud Al-Masaadi Bardo</u>	Chapitre : Notion De Polynômes	Prof : Ayadi Mondher 2 ème sciences 2 ème technologie de l'informatique
---	--------------------------------	---

I. Pour démarrer

- Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :
 $A(x) = (x - 1)(3x^2 - 5x - 1)$; $B(x) = (3 + x)^2(x^2 - x - 3)$;
 $C(x) = (3x - 2)^2$
- Soit $f(x) = 6x^3 - 7x^2 - 5x + 1$ et $g(x) = (2x - 3)(3x^2 + x - 1) - 2$
a) Calculer $f(0)$ et $g(0)$; $f(-1)$ et $g(-1)$; $f(-3)$ et $g(-3)$
b) A-t-on $f(x) = g(x)$, pour tout réel x ?

II. Fonction polynômes :

1) Définition et remarque :

Définition 1

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ et a_n des réels.
La fonction f définie par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ est appelée fonction polynôme.
Les réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ sont appelés les coefficients de la fonction polynôme.

Remarque

Au lieu de dire « la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ », on dit souvent « le polynôme f est définie par : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ »

2) Egalité de deux fonctions polynômes

Activité 1:

- on considère le polynôme f définie par : $f(x) = x^2 - 5x + 6$
a) Calculer :
 $f(2) = \dots\dots\dots$
 $f(3) = \dots\dots\dots$
b) Le polynôme f est-il nulle ?
.....
.....

- Soit g le polynôme définie par $g(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
Montrer que $(g(x) = 0, \text{ pour tout réel } x)$ équivaut à $(a_2 = a_1 = a_0 = 0)$
On utilise la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues par la méthode de substitution et d'élimination.

- Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme tel que $P(x) = 0$, pour tout réel x . Quelle conjecture peut-on émettre sur les coefficients de ce polynôme.
.....
.....

Définition 2

tout polynôme nul de la forme
 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$
équivaut à $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$

- Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
et $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ deux polynômes tels que
 $P(x) = Q(x)$, pour tout réel x . Que peut-on dire de a_n et b_n ,
 a_{n-1} et b_{n-1} , a_1 et b_1 , a_0 et b_0

Définition 3

On admet que tout polynôme non nul a une écriture unique de la forme
 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$
L'entier n est appelé le degré du polynôme P , on écrit $d^\circ(P) = n$.
On convient que le polynôme nul n'a pas de degré.

Vocabulaire :

- Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$
- a_0 s'appelle le terme constant.
 - $a_1 x$ s'appelle le terme de premier degré ou le terme en x .
 - $a_n x^n$ s'appelle le terme de degré n ou le terme en x^n ou le terme de plus haut degré.
 - Chacun des termes $a_0, a_1 x, \dots, a_{n-1} x^{n-1}$ et $a_n x^n$ est appelé monôme.



Remarque

- ✓ Tout polynôme de premier degré est appelé binôme ou binôme du premier degré.
- ✓ Tout polynôme du second degré est appelé trinôme ou trinôme de second degré.

Exercice :

a) Déterminer parmi les fonctions ci-dessous celles qui sont des polynômes.

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -2x^3 - 5x^2 - 1$$

$$H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto 1 + 3t + \frac{2}{3}t^2 - 6t^3$$

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto 2z^5 - 3z^3 + z^2 + \sqrt{z}$$

$$P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto \sqrt{3}y^3 + y^2 - \frac{1}{y} - 2$$

b) Déterminer le degré de chacun des polynômes ci-dessous.

$$P(x) = 3x^4 - 7x^2 + x$$

$$d^\circ(P) = \dots$$

$$Q(x) = 2 - x + x^3 + x^5 + x^7$$

$$d^\circ(Q) = \dots$$

$$S(x) = (2x + 1)(2x^3 + 8x - 1)$$

$$d^\circ(S) = \dots$$

$$K(x) = (x - 1)^3 - x^3$$

$$d^\circ(K) = \dots$$

3) Opérations sur les fonctions polynômes

Définition 3

Soit f et g deux polynômes et α un réel.

- On appelle somme de f et g le polynôme noté $f+g$ et défini pour tout réel x par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- On appelle produit de polynôme f par le réel α le polynôme noté αf et définie pour tout réel x par $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.
- On appelle produit des polynômes f et g le polynôme $f \cdot g$ et définie pour tout réel x par $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Exercice :

Réduire et ordonner les polynômes $P+Q$, $3P-2Q$ et $P \cdot Q$ dans chacun des cas suivants et préciser le degré de chaque polynôme obtenu.

a) $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$; $Q(x) = 3x^3 - x$

b) $P(x) = (2x + 1)^2$; $Q(x) = (x - 2)(x^3 + 1)$

4) Racines d'un polynôme -Factorisation d'un polynôme

Activité 2:

Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

a) Calculer $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$

b) Que remarquez-vous ?

c) Factoriser alors $P(x)$

Définition 4

Soit P et Q deux polynômes.

- On dit que α_i est une racine ou un zéro d'un polynôme P si $P(\alpha_i) = 0$
- Si α_i est une racine d'un polynôme P alors $P(x) = (x - \alpha_i) \cdot R(x)$ pour tout réel x ou $d^\circ(R) = d^\circ(P) - 1$
- On dit que le polynôme P est factorisable par le polynôme Q s'il existe un polynôme R tel que pour tout réel x , $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$ tel que $d^\circ(R) = d^\circ(P) - d^\circ(Q)$

Activité 3:

Soit P et Q les polynômes définis par $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ et

$$Q(x) = 3x^3 + x^2 + 2x - 6.$$

1) a) Vérifier que 2 et -3 sont deux racines de P .

b) Déterminer le polynôme R tel que, pour tout réel x , on a

$$P(x) = (x - 2)(x + 3) \cdot R(x)$$

2) a) calculer $Q(1)$

c) Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout réel x , on a

$$Q(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

Théorème :

Soit P un polynôme de degré n .

- ◆ Pour $n \geq 1$, si α_1 est une racine de P alors
 - P est factorisable par $(x - \alpha_1)$
 - Il existe un polynôme R de degré $(n - 1)$ tel que $P(x) = (x - \alpha_1) \cdot R(x)$
- ◆ Pour $n \geq 2$, si α_1 et α_2 sont deux racines de P alors
 - P est factorisable par $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$
 - Il existe un polynôme R de degré $(n - 2)$ tel que $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot R(x)$
- ◆ **Plus généralement** soit P est un polynôme de degré n ($n \geq 3$) si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ et α_k ($k \leq n$) sont des racines de P alors
 - P est factorisable par $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_k)$
 - Il existe un polynôme R de degré $(n - k)$ tel que $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_k) \cdot R(x)$

Exercice :

- 1) Soit $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$
Vérifier que $\alpha = 2$ est une racine du polynôme P et écrire $P(x)$ sous la forme $(x - \alpha) \cdot Q(x)$, ou $Q(x)$ est un polynôme qu'on déterminera.
- 2) Soit $P(x) = 3x^3 - 13x^2 - 11x + 5$
Vérifier que $\alpha = -1$ et $\beta = 5$ sont deux racines du polynôme P et écrire $P(x)$ sous la forme $(x - \alpha)(x - \beta) \cdot R(x)$ ou $R(x)$ est un polynôme qu'on déterminera.

5) Polynômes symétriques

➤ Polynômes symétriques de degré 3

Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + a$ avec $a \neq 0$

On remarque que -1 est une racine apparente donc on peut écrire P sous la forme suivante : $P(x) = (x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a]$ et on détermine le nombre de solution de $P(x)$ suivant les valeurs de a et b

➤ Polynômes symétriques de degré 4

Soit $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$

- Si $a + b + c + b + a = 0$ ou $c = -2(a + b)$ on remarque que 1 est une racine double de P donc on écrit P sous la forme suivante :

$P(x) = (x - 1)^2 \cdot Q(x)$, ou $Q(x)$ est un polynôme qu'on déterminera.

- Si $a + b + c + b + a \neq 0$, on vérifie que 0 n'est pas une racine de P donc on établit que l'équation $P(x)$ est équivalente à l'équation suivante $P_1(x) = a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c$
Poser $X = x + \frac{1}{x}$ et résoudre l'équation $P_1(x) = 0$
On remarque que l'équation se ramène à la résolution de deux équations du second degré.